Compito di geometria e algebra lineare del 15 luglio 2024

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, determina se è vera o falsa fornendo una motivazione: se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio (in cui scegli g esplicitamente).

(1) Se g è non degenere, non ci sono vettori isotropi non nulli.
(2) Se g è definito positivo, allora g è non degenere.
(3) Se g ha segnatura $(1, 1, 0)$, esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^2$ di dimensione 1 tale che $W^\perp = W$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio delle matrici reali 2×2. Considera le matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed i sottospazi di V

$$U = \{M \in V \mid \operatorname{tr}(BM) = 0,\ \operatorname{tr}(CM) = 0\},$$
$$W_k = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il sottospazio W_k dipende da un parametro $k \in \mathbb{R}$. Calcola la dimensione del sottospazio $U \cap W_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ un sottospazio vettoriale di dimensione 2. Siano $p_W \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su W e $f_\theta \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione antioraria di angolo θ intorno alla retta $W^\perp$.

Per quali valori di $\theta \in [0, 2\pi)$ la composizione $f_\theta \circ p_W$ è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Considera nello spazio i punti

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Siano r la retta passante per P e Q e s la retta passante per R e S.

(1) Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$.
(2) Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$ e $f(s) = r$.

In entrambi i casi prima descrivi come intendi costruire f a parole e poi determina A e b.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Non è vero, ad esempio prendiamo
$$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$
Il prodotto scalare g_S è non degenere e il vettore v è isotropo.

(2) Vero. Dimostrato a lezione.

(3) Vero. Se g ha segnatura $(1,1,0)$, esiste una base ortogonale v_1, v_2 per cui
$$[g]_{v_1,v_2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$
In questo caso v_1+v_2 è isotropo e quindi se prendiamo $W=\mathrm{Span}(v_1+v_2)$ otteniamo $W=W^\perp$.

Esercizio 2. Abbiamo
$$W_k=\left\{\begin{pmatrix}a & bk\\ a & a+b\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$
Quindi
$$\begin{aligned}W_k\cap V&=\left\{\begin{pmatrix}a & bk\\ a & a+b\end{pmatrix}\,\middle|\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & bk\\ a & a+b\end{pmatrix}\right)=0,\quad \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & bk\\ a & a+b\end{pmatrix}\right)=0\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}a & bk\\ a & a+b\end{pmatrix}\,\middle|\, 2a+b+bk=0,\quad 3a+b=0\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}a & bk\\ a & a+b\end{pmatrix}\,\middle|\, -a+bk=0,\quad 3a+b=0\right\}\end{aligned}$$
Dobbiamo quindi risolvere un sistema omogeneo con due incognite a, b e due equazioni. L'unica soluzione è quella nulla se la matrice dei coefficienti ha determinante non nullo:
$$\det\begin{pmatrix}-1 & k\\ 3 & 1\end{pmatrix}\neq 0$$
cioè se $k\neq -1/3$. Se invece $k=-1/3$ la matrice dei coefficienti ha rango 1 e quindi le soluzioni formano uno spazio di dimensione 1. Quindi la dimensione di $W_k\cap U$ è 0 per $k\neq -1/3$ e 1 per $k=-1/3$.

Esercizio 3. Sia v_1, v_2 una base ortonormale di W e sia v_3 base ortonormale di $W^\perp$. Quindi $\mathcal{B}=v_1,v_2,v_3$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Rispetto a questa base gli endomorfismi p_W e f_θ si scrivono facilmente:
$$[p_W]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad [f_\theta]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Quindi facendo il prodotto di matrici si ottiene
$$[f_\theta\circ p_W]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
Usando il teorema di diagonalizzabilità si vede che questa matrice è diagonalizzabile se e solo se $\theta=0,\pi$.

Esercizio 4. Abbiamo
$$r=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad s=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$
Si vede facilmente che sono due rette sghembe con perpendicolare comune
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$
Il punto medio fra le due rette è
$$P=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Per ottenere una isometria f tale che $f(r) = s$ e $f(s) = r$ è sufficiente operare una antirotazione di centro P, di asse verticale e di angolo $\pi/2$. Facendo i conti otteniamo

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$